8/11/19

→ ακρότατο = μέγιστο ή ελάχιστο

→ μέγιστο/ελάχιστο = μια μέγιστη/ελάχιστη τιμή μιας πραγματικής συν/σης

→ σημείο ακροτάτου = σημείο στο πεδίο ορισμού μιας συν/σης, όπου αυτή λαμβάνει ακρότατο

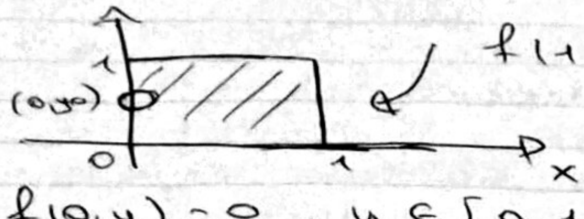
→ τοπικό ακρότατο = ακρότατο της συνάρτησης τοπικά γύρω (δηλ. σε μια περιοχή) ενός σημείου

→ ολικό ακρότατο = ακρότατο «για όλη» η συνάρτηση (δηλ. λαμβάνοντας υπόψη όλο το πεδίο ορισμού)

Προσοχή: (1) Δεν πρέπει απαραίτητα κάθε συνάρτηση να έχει ακρότατα,
π.χ. η $f(x,y)=x$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

(2) Μια συνεχής συν/ση με συμπαγές πεδίο ορισμού έχει πάντα μέγιστο και ελάχιστο (βλ. παλιότερη απόδειξη)
π.χ. η $f(x,y)=x$, $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ έχει ακρότατα (μη γνήσια) στα σημεία $(0,y_0)\in\{0\}\times[0,1]$ (ελάχιστα) και στα σημεία $(1,y_0)\in\{1\}\times[0,1]$ (μέγιστα),

Τα οποία είναι ολικά (και άρα και τοπικά) ακρότατα και άλλα ακρότατα δεν υπάρχουν



$f(1,y)=1 \ , \ y\in[0,1]$

$f(0,y)=0 \ , \ y\in[0,1]$

(3) Μια συνάρτηση μπορεί να έχει το ίδιο ακρότατο σε περισσότερα σημεία. ~~Τα οποία είναι τοπικά (και άρα και τοπικά) ακρότατα και άλλα ακρότατα δεν υπάρχουν~~

Το $U=[0,1]\times[0,1]$ είναι συμπαγές, δηλ. κλειστό και φραγμένο αφού α) είναι φραγμένο: αφού $U\subset B((0,0),r)$, $r>\sqrt{2}$

$[\ (x,y)\in U \Rightarrow 0\le x, y\le 1 \Rightarrow |x|, |y|\le 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow |x|^2\le 1, \ |y|^2\le 2 \Rightarrow \underbrace{|x|^2+|y|^2}_{=\|(x,y)\|^2}\le 2$

$\Rightarrow \|(x,y)\|\le\sqrt{2}<r \Rightarrow (x,y)\in B((0,0),r)$ για $r>\sqrt{2}\ ]$

β) Το U είναι κλειστό: Έστω $\{(x_\nu,y_\nu)\}\subset U$: $[0,1]\times[0,1]$ με $\underbrace{(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2}$

$\Leftrightarrow x_\nu\to x_0 \wedge y_\nu\to y_0$

Θνδο: $\underbrace{(x_0,y_0)\in U=[0,1] \wedge y_0\in[0,1]}$

$\Leftrightarrow x_0\in[0,1] \wedge y_0\in[0,1]$

Αυτό όμως ισχύει αφού

$\begin{cases} x_\nu\to x_0 \\ \in[0,1] \Rightarrow x_0\in[0,1]\end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccccc} 0 & \le & x_\nu & \le & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \le & x_0 & \le & 1\end{array}\right)$

και αντίστοιχα για y_ν ∎

Σχετικά με την << εντύπωση >> μας ότι άλλα ακρότατα (και σημεία ακροτάτου) δεν υπάρχουν στο προηγ. παράδ. μπορούμε να χρησιμοποιούμε το εξής βασικό εργαλείο-κριτήριο

<u>Θεώρημα:</u> (Αναγκαία συνθήκη τοπικού ακροτάτου)
Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f: U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφ. στο σημείο τοπικού ακροτάτου $\bar{x} \in U$. Τότε, $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$.

<u>Ερώτηση:</u> Τι μπορεί να εξαγάγω από αυτό το θεώρημα, αν το πεδίο ορισμού U της f είναι το $[0,1]\times[0,1]$ και θέλω να εξετάσω τη συνάρτηση $f: [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$

<u>Απάντηση:</u> (SOS - ΑΡΑ) Αν θέλω να βρω ακρότατα για μια συνάρτηση $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, <u>επειδή και η πιο πάνω αναγκαία συνθήκη για τοπικά ακρότατα και η επόμενη ικανή συνθήκη για τοπ. ακρότατα</u>, <u>προϋποθέτουν</u> το πεδίο ορισμού να είναι <u>ανοικτό</u>, αυτό που μπορώ να κάνω, είναι να χρησιμοποιήσω τα θεωρήματα αυτά (αν η f είναι αρκετά λεία) στο εσωτερικό του U, $\operatorname{int} U = \mathring{U}$ (το οποίο είναι ανοικτό) δηλ. να εξετάσω τον περιορισμό της $f: U \to \mathbb{R}$ στο $\mathring{U}$: $(f:)\ f|_{\mathring{U}}: \mathring{U} \to \mathbb{R}$

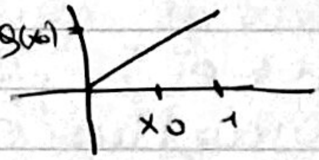
Για το παράδειγμα $f(x,y)=x$ βλέπουμε ότι $\forall\,(x,y)\in(0,1)\times(0,1)$ έχουμε $\nabla f(x,y)=(1,0)$, $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$. Άρα, από την αναγκαία συνθήκη (Αν η $f:U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^n$, ανοικτό, είναι μερικώς διαφ. στο σημείο τοπικού ακροτάτου $\bar{x}\in U$, τότε $\nabla f(\bar{x})=\bar{0}$), αφού αυτή μας λέει «έχεις ακρότατο στο $(0,1)\times(0,1)$, τότε εκεί η f θα έχει κλίση $\nabla f(x,y)=(0,0)$» και εμείς για κάθε σημείο $(x,y)\in(0,1)\times(0,1)$ έχουμε $\nabla f(x,y)=(1,0)$, αυτό σημαίνει ότι η $f(x,y)=x$ περιορισμένη στο $(0,1)\times(0,1)$ δεν έχει κανένα ακρότατο, δηλ. η $f(x,y)=x$, $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$, δεν έχει ακρότατα στα σημεία $(x,y)\in(0,1)\times(0,1)$

Συνοψίζουμε: Η $f(x,y)=x$, $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$ έχει (α) μη γνήσια σημεία ολικού ελαχίστου τα $(0,y_0)$, $y_0\in[0,1]$, όπου $f(0,y_0)=0$

(β) μη γνήσια σημεία ολικού μεγίστου, τα $(1,y_0)$, $y_0\in[0,1]$, όπου $f(1,y_0)=1$

(γ) δεν έχει τοπικά (και άρα ούτε ολικά) σημεία ακροτάτων στο $(0,1)\times(0,1)$

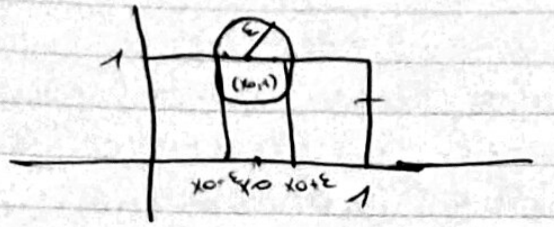
[Η $g(x)=x$, $x\in(0,1)$



]

(δ) Στα σημεία $(x,1)$, $x\in(0,1)$. [και ανάλογα στα σημεία $(x,0)$, $x\in(0,1)$]. Η f δεν έχει τοπικά ακρότατα, αφού $\forall\, x_0\in(0,1)$ $\exists\,\varepsilon>0$ τ.ω. $0<x_0-\varepsilon<x_0<x_0+\varepsilon<1$ και $\forall\, x\in(x_0-\varepsilon,x_0)$ έχουμε $f(x)=x<x_0$ και $\forall x\in(x_0,x_0+\varepsilon)$ έχουμε $f(x)=x>x_0$. Συνεπώς, δεν ισχύει για κανένα $\varepsilon>0$ ότι $f(x_0,1)\geq f(x,y)$ για κάθε ~~(x,y)∈B~~ $(x,y)\in B((x_0,1),\varepsilon)\cap([0,1]\times[0,1])$

→



$U = [0,1]\times[0,1]$
[και αντίστοιχα για $\leq$]

Ερώτηση: $U = [0,1]\times[0,1] \Rightarrow \mathring{U} = (0,1)\times(0,1)$. Γιατί?

[Για την εξέταση: Αν απαιτηθούν στα πλαίσια, όμως, ~~αλλας~~ άλλου ζητήματος (δηλ. όταν αυτά δε ζητούνται ρητά) χαρακτηρισμοί εσωτερικών, συνόρων, κλειστών σημείων, αρκεί ο προσδιορισμός τους χωρίς απόδειξη]
[Δηλ. αν σε κάποια άσκηση, πρέπει να διακρίνεται το $\mathring{U}$, ∂U ενός U, π.χ σε άσκηση για ακρότατα, τότε αρκεί να δ.ο x απόσταση και
$\mathring{U} = \ldots$, $\partial U = \ldots$]

Απόδειξη (ικανής συνθήκης): $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$
Έστω η f έχει τοπικό ακρότατο στο $\bar{x} \in U$
(μέγιστο)
$\exists\ \varepsilon > 0$ $B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$ (αφού U ανοικτό)
Έστω οι συναρτήσεις $g_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$,
$g_i(t) = f(\bar{x} + t \cdot \bar{e}_i)$, $i = 1, \ldots, n$
Αυτές είναι διαφ/μες στο $t=0$ και έχουν παραγώγους:

$$g_i'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g_i(t) - g_i(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + t\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{t} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$$

$\Rightarrow$ (ΑΠΕΙ1) $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$ (π.χ.) $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$)
Θεώρημα
Fermat

Ικανή Συνθήκη για την ύπαρξη του ακροτάτου

Ορισμός: Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ονομάζεται (1) θετικά ημι-ορισμένος αν $\bar{n}^T A \bar{n} \geq 0$ $\forall \bar{n} \in \mathbb{R}^n$ (ορισμός)

(2) θετικά ορισμένος, αν $n^T A \bar{n} > 0$ $\forall \bar{n} \neq \bar{0}$

$$\left[(n_1, \dots, n_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} = \right.$$

$$\left. = A = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} n_1^2 + \dots + n_n^2 = \|\bar{n}\|^2 \right]$$

αντίστοιχα με $\leq$ και $<$: αρνητικά ημι-ορισμένος, αρνητικά ορισμ.

(3) μη-ορισμός $\Leftrightarrow$ ο A δεν είναι ούτε θετικά ούτε αρνητικά ημι-ορισμ.

Πρόταση (κριτήριο ιδιοτιμών): Ένας συμμετρικός πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι

(1) θετικά ημιορισμένος $\Leftrightarrow$ όλες οι ιδιοτιμές είναι ≥ 0 $\left[\text{π.χ.} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \right]$

(2) θετικά ορισμένος $\Leftrightarrow$ — // — — // — > 0 $\left[\text{π.χ.} I = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \right]$

(3) μη ορισμένος $\Leftrightarrow$ έχει και αρνητικές και θετικές ιδιοτιμές $\left[\text{π.χ.} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right]$

Ικανή συνθήκη τοπ. ακροτάτων: Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^2(U)$ και $\bar{x} \in U$ με $\nabla f(\bar{x}) = \bar{0}$.
Τότε:

(α) Η $Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ θετικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γν. τοπικό ελάχιστο

(β) Η $Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ αρνητικά ορισμένος $\Rightarrow$ η f έχει στο $\bar{x}$ γν. τοπικό μέγιστο

(γ) Η $Hf(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ μη ορισμένος $\Rightarrow$ Η f δεν έχει τοπ. ακρ. στο $\bar{x}$ αλλά σαγματικό σημείο (σημείο σέλλας)

Παράδειγμα: (α) $f(x,y) = x^2+y^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow Hf(0,0) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(β) $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = -2(x,y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$Hf(0,0) = -2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(γ) [Μ.Τ.] $f(x,y) = x^2-y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ (για το σπίτι) γ) [Μ.Τ] $f(x,y) = x^2 - y^2, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \{ \ldots)$

$f(x,y) = x^2 - y^2$

$\nabla f(x,y) = 2(x - y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Προσέξτε: $f(x,0) = x^2, \; f(0,y) = y^2$

Προσοχή εάν στον εσσιανό προκύψει μηδέν.